5. Logika – dedukce

(Markéta Popelová 7.11.2009)

LAx logické výrokové axiomy (schémata):

1. (PL1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. (PL2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. (PL3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Modus ponens (pravidlo odloučení): Z φ a $\varphi \to \psi$ odvoď ψ.

Poznámky: Pravdilo modus ponens (MP) se dá použít následovně:

- $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$ (Toto doslova říká z φ a $\varphi \to \psi$ odvoď ψ.)
- Jestliže $T \vdash \varphi$ a $T \vdash \varphi \to \psi$, pak i $T \vdash \psi$. (Neboli když v T je dokazatelné φ a $\varphi \to \psi$, pak v T je dokazatelné i ψ.)
    - Speciálně (pro prázdné T) jestliže $\vdash \varphi$ a $\vdash \varphi \to \psi$, pak i $\vdash \psi$. (Neboli když je dokazatelné φ a $\varphi \to \psi$, pak je dokazatelné i ψ.)
- Zároveň můžeme zkombinovat předchozí možnosti: Jestliže $T \vdash \varphi \to \psi$, pak $T, \varphi \vdash \psi$.

Tvrzení 2.2.3

1) (O korektnosti) *Každá v T dokazatelná formule je v T pravdivá.*
2) *Má-li teorie model, je bezesporná.*

Důkaz:

1) (O korektnosti) Budeme dokazovat indukcí na teorémech. Každý axiom z T je v T pravdivý. Ukažme si, že každý logický axiom LAx je pravdivý, tedy i v T pravdivý.

    1. (PL1)
    2. (PL2)
    3. (PL3)

    Dále jsou-li v T pravdivé φ a $\varphi \to \psi$, pak je v T pravdivé i ψ, neboť:

$$M(T) \subset M(\varphi) \text{ a } M(T, \varphi) \subset M(T, \psi) \text{ tedy } (M(T) \cap M(\varphi)) \subset (M(T) \cap M(\psi)).$$

$$\text{Tedy } M(T) = (M(T) \cap M(\varphi)) \subset (M(T) \cap M(\psi)) \subset M(\psi).$$

2) Připomeňme, že teorie je *bezesporná*, jestliže existuje formule, která v ní není dokazatelná. Pokud má teorie model, tak v něm určitě nebude platit φ a zároveň $\neg\varphi$ pro žádný výrok φ. Tedy bude existovat výrok (formule), který není dokazatelný.

♡

Tvrzení 2.2.4 *Buďte φ a ψ dvě formule výrokové teorie T. Pak*

1) $\vdash \varphi \to \varphi$
2) (O dedukci) $T, \psi \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \psi \to \varphi$

Důkaz:

1) Nechť ψ je výrok $\varphi \to \varphi$. Pak platí:

(1)	$\vdash \varphi \to \psi$	(PL1) ve tvaru $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$
(2)	$\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$	(PL1)
(3)	$\vdash (\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \varphi))$	(PL2)
(4)	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \varphi)$	MP (2) a (3)
(5)	$\vdash \varphi \to \varphi$	MP (1) a (4)

2) (O dedukci) Tvrzení rozdělme na dvě implikace:

   1. $T \vdash \psi \to \varphi \Rightarrow T, \psi \vdash \varphi$
      Tato implikace vyplývá ihned použitím modus ponens (viz poznámky pro použití MP třetí hlavní odrážka).
   2. $T, \psi \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \psi \to \varphi$
      Tuto implikaci dokážeme indukcí na teorémech terie $T \cup \psi$ (což můžeme zapisovat jako teorie T, ψ).

      1. Buď φ axiom teorie T, ψ. Pak nastane jedna ze dvou možností:

         1. φ je rovno ψ, pak $T \vdash \psi \to \varphi$ plyne z 1. (Poznamenejme ještě, že pokud je (logicky) dokazatelný výrok σ, tedy $\vdash \sigma$, pak je výrok σ dokazatelný i v libovolné teorii: $T \vdash \sigma$.)
         2. φ je přímo axiom teorie T (neboli $\varphi \in T$). Pak pomocí MP z $T \vdash \varphi$ (tedy i $T, \psi \vdash \varphi$) a (PL1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ plyne $T \vdash \psi \to \varphi$.

      2. Nechť φ je odvozeno pomocí MP z χ a $\chi \to \varphi$ a nechť pro tyto teorémy χ a $\chi \to \varphi$ tvrzení platí:

         · $T, \psi \vdash \chi \Rightarrow T \vdash \psi \to \chi$
         · $T, \psi \vdash \chi \to \varphi \Rightarrow T \vdash \psi \to (\chi \to \varphi)$

         Neboť χ a $\chi \to \varphi$ jsou teorémy teorie T, ψ, tak jsou dokazatelné v T, ψ. Proto platí

         $$(1)\ T \vdash \psi \to \chi \quad \text{a} \quad (2)\ T \vdash \psi \to (\chi \to \varphi).$$

         Po použití MP na (2) a (PL2) ve tvaru

         $$(\psi \to (\chi \to \varphi)) \to ((\psi \to \chi) \to (\psi \to \varphi))$$

dosteneme

$$(3)\ T \vdash ((\psi \to \chi) \to (\psi \to \varphi)).$$

Opět použijme MP, tentokrát na (1) a (3) a dostaneme

$$T \vdash (\psi \to \varphi).$$

♡

Lemma: 2.2.5. *Pro výroky φ, ψ platí:*

[a]	i)	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$	ii)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$
	ii)	$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$	[c]	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$
	iii)	$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	[d]	$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$
[b]	i)	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	[e]	$\vdash \neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

Důkaz:

[a] i)	(1)		$\vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(PL1)
	(2)	$\neg\varphi$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	(O dedukci)
	(3)	$\neg\varphi$	$\vdash \varphi \to \psi$	(MP) (2) & (PL3)
	(4)		$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$	(MP) (2) & (PL3)
[a] ii)	(5)	$\neg\varphi$	$\vdash \varphi \to \psi$	(O dedukci)
	(6)	$\{\neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \psi$	(O dedukci)
[a] iii)	(7)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(vlastnost množin)
	(8)	φ	$\vdash \neg\varphi \to \psi$	(O dedukci)
	(9)		$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	(O dedukci)
[b] i)	(1)		$\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$	[a] i)
	(2)	$\neg\neg\varphi$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	(O dedukci)
	(3)	$\neg\neg\varphi$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(MP) (2) & (PL3)
	(4)	$\neg\neg\varphi$	$\vdash \varphi$	(O dedukci)
	(5)		$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(O dedukci)
[b] ii)	(1)		$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	[b] i)
	(2)		$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(MP) (1) & (PL3)
[c]	(1)	$\{\neg\neg\varphi, \varphi \to \psi\}$	$\vdash \psi$	(MP)
	(2)		$\vdash \psi \to \neg\neg\psi$	[b] i)
	(3)	$\{\neg\neg\varphi, \varphi \to \psi\}$	$\vdash \neg\neg\psi$	(MP) (1) & (2)
	(4)	$\varphi \to \psi$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$	(O dedukci)
	(5)	$\varphi \to \psi$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	(MP) (4) & (PL3)
	(6)		$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(O dedukci)

[d]	(1)		$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	2.2.4. 1)
	(2)	$\varphi \to \psi$	$\vdash \varphi \to \psi$	(O dedukci)
	(3)	$\{\varphi \to \psi, \varphi\}$	$\vdash \psi$	(O dedukci)
	(4)	φ	$\vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$	(O dedukci)
	(5)	φ	$\vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$	(MP) (4) & (PL3)
	(5)		$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	(O dedukci)

[e]	(1)		$\vdash \neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$	[d]
	(2)	$\neg\varphi$	$\vdash \neg(\neg\varphi \to \varphi)$	(O dedukci)
	(3)		$\vdash \neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)$	(O dedukci)
	(4)		$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	(MP) (3) & (PL3)

♡