Asymptotická složitost

Doprovodný materiál pro cvičení Programování I. NPRM044
Autor: Markéta Popelová
Datum: 30.10.2010

Řešení vybraných částí domácího úkolu na asymptotickou složitost

1. **Zadání**: Rozhodněte, zda platí, že $n! \in O(n^n)$ a své rozhodnutí dokažte. Předně si připomeňme definici symbolu O:
$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : |f(n)| \leq |c \cdot g(n)|$$
Snažíme se tedy najít pevné c a n_0, aby $\forall n \geq n_0$ platilo[1]:
$$n! \leq c \cdot n^n$$
Převeďme si rovnici do šikovného tvaru:
$$\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq c$$
Vidíme, že každý činitel na levé straně bude pro $n \geq 1$ menší (kromě prvního činitele dokonce ostře) než 1. Stačí vzít tedy $c = 1$ a $n_0 = 1$ a $\forall n \geq n_0$ bude nerovnost platit.

   Poznámka 1: Je zde velice podstatné nejen najít c a n_0, pro které nerovnost platí, ale především ukázat, proč to bude platit i pro $\forall n \geq n_0$. To ukážeme většinou tak, že podíl na levé straně buďto stále klesá, nebo je konstantní, nebo alespoň neroste do nekonečna. Proč je to potřeba? Protože ho potřebujeme omezit nějakou pevnou (tzn. předem danou) konstantou.

   Poznámka 2 (Pro ty, kdož znají limity): Poznámka 1 vlastně říká, že podíl na levé straně konverguje k nějakému pevnému $k < \infty$. To není náhoda. Lze totiž dokázat, že pokud je daná limita definovaná, platí následující vztah:
$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow (\exists k \in \langle 0, \infty)) : \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k.$$

2. **Zadání**: Rozhodněte, zda platí, že $n! \in O(2^n)$ a své rozhodnutí dokažte. Zkusme postupovat analogicky jako v předchozím případě. Opět hledáme pevné c a n_0, aby $\forall n \geq n_0$ platilo:
$$n! \leq c \cdot 2^n$$
$$\frac{n!}{2^n} \leq c$$
Rádi bychom podíl na levé straně omezili nějakou pevnou konstantou c, ale v tomto případě se nám to nepodaří. Důvodem je, že podíl na levé straně roste do nekonečna (neboť 2^n roste „pomaleji“ než $n!$). Bylo by však dobré čtenáři (který třeba nemusí být tak dobře znalý vlastností těchto funkcí) ukázat, proč tomu tak je.

   Zde narážíme na velmi častou chybu, jak se snaží někteří lidé ukázat, že zkoumaný vztah neplatí. Najdou pevné c a n_0, pro které nerovnost neplatí (případně ukážou, že to neplatí i pro nějaká vyšší n) a považují to za důkaz. To ale nestačí. Může totiž existovat jiné pevné c a jiné, například vyšší, n_0, že pro vyšší n již nerovnost platit bude.

   Jak tedy postupovat, když chceme ukázat, že $f(n) \notin O(g(n))$? Podívejme se na dva možné přístupy.

   2.1. Prvně zkusme postupovat přímo. Tedy se pokusíme zdůvodnit, proč podíl na levé straně roste do nekonečna a nelze ho tak pro nějaká vysoká n omezit pevnou konstantou. Upravme si nerovnost do následujícího tvaru:
$$\frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \leq c$$

[1] Není třeba uvažovat absolutní hodnoty, neboť se jedná o funkce, které jsou pro kladná n všude kladné.

$$\frac{n}{2 \cdot 2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} \leq c$$

Z tohoto rozepsání je vidět, že všechny činitele na levé straně jsou větší než 1 pro libovolné $n \geq 4$. Zároveň budeme-li zvyšovat n, budou pouze přibývat další činitele (ostatní vždy zůstanou stejné). Tyto nové činitele budou vždy ostře větší než ty předchozí. Tedy celková hodnota podílu se bude zvyšovat až do nekonečna.

2.2. Druhý přístup je často o něco jednodušší. Dokážeme negaci definice, tedy že:

$$(\forall c > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geq n_0) : |f(n)| > |c \cdot g(n)|$$

V tomto případě nám „nepřítel“ zadá kladné c a přirozené n_0 a my mu vždy najdeme $n \geq n_0$, že bude platit:

$$n! \geq c \cdot 2^n$$

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \leq c$$

$$\frac{n}{4 \cdot c} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} \leq 1$$

Nyní známe hodnotu c a my musíme najít n, aby nerovnost platila. To je ale snadné. Všechny od druhého činitele až po předposlední jsou ostře větší než 1. Poslední je roven jedné. Bude-li i první činitel větší než jedna, bude nerovnost platit. K tomu nám ale pouze stačí, aby $n > 4c$.

Hledané n je tedy

$$n := \max\{n_0, 4c\}.$$

Poznámka: Všimněte si, jak je zde podstatné pořadí kvantifikátorů. Nyní je kruciální, že nepřítel nám zadal hodnoty c a n_0 na začátku a my podle nich můžeme spočítat n. Naopak dokazujeme-li, že $f(n) \in O(g(n))$, pak musíme najít c úplně na začátku nehledě na výsledných hodnotách n.